第二章
高階線性微分方程式

習題 2-1

3. 已知微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}-5\dfrac{dy}{dx}+6y=0.$

(1) 試證 e^{2x} 與 e^{3x} 爲此方程式在區間 $(-\infty, \infty)$ 的線性獨立解.

(2) 寫出該已知方程式的通解.

(3) 求該微分方程式的解，使其滿足初期條件 $y(0)=2$，$y'(0)=3$.

解：(1) (i) 將 $y=e^{2x}$ 代入微分方程式中，得

$$\frac{d^2}{dx^2}e^{2x}-5\frac{d}{dx}e^{2x}+6(e^{2x})=4e^{2x}-10e^{2x}+6e^{2x}=0$$

故 $y=e^{2x}$ 爲已知微分方程式之解.

(ii) 將 $y=e^{3x}$ 代入微分方程式中，得

$$\frac{d^2}{dx^2}e^{3x}-5\frac{d}{dx}e^{3x}+6(e^{3x})=9e^{3x}-15e^{3x}+6e^{3x}=0$$

故 $y=e^{3x}$ 爲已知微分方程式之解.

(iii) $w(e^{2x}, e^{3x})=\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix}=3e^{5x}-2e^{5x}=e^{5x}\neq 0$

故 e^{2x} 與 e^{3x} 爲已知微分方程式在 $(-\infty, \infty)$ 上之線性獨立解.

(2) 通解爲 $y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$，其中 c_1、c_2 爲常數.

(3) $\begin{cases} y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x} \\ y'=2c_1e^{2x}+3c_2e^{3x} \end{cases}$，且 $\begin{cases} y(0)=2 \\ y'(0)=3 \end{cases}$

故 $\begin{cases} c_1+\ c_2=2 \\ 2c_1+3c_2=3 \end{cases}$，解得 $c_1=3$，$c_2=-1$，

故特解為 $y=3e^{2x}-e^{3x}$.

6. 已知 $y_1=e^{-2x}$ 為 $(2x+1)y''+4xy'-4y=0$ 之一解，求另一線性獨立解.

解：另一線性獨立解為

$$y_2=e^{-2x}\int \frac{e^{-\int \frac{4x}{2x+1}dx}}{(e^{-2x})^2}\,dx=e^{-2x}\int \frac{e^{-\int\left(2-\frac{2}{2x+1}\right)dx}}{e^{-4x}}\,dx$$

$$=e^{-2x}\int \frac{e^{-2x}\cdot e^{\ln(2x+1)}}{e^{-4x}}\,dx=e^{-2x}\int \frac{e^{-2x}(2x+1)}{e^{-4x}}\,dx$$

$$=e^{-2x}\int e^{2x}(2x+1)\,dx=e^{-2x}\left[\frac{1}{2}e^{2x}(2x+1)-\frac{1}{2}e^{2x}\right]$$

$$=\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{1}{2}=x$$

8. 已知 $y_1=x^2$ 為 $x^2y''-3xy'+4y=0$ 之一解，求另一線性獨立解，並寫出其通解.

解：另一線性獨立解為

$$y_2=x^2\int \frac{e^{\int \frac{3x}{x^2}dx}}{(x^2)^2}\,dx=x^2\int \frac{e^{3\int\frac{dx}{x}}}{x^4}\,dx=x^2\int \frac{e^{3\ln|x|}}{x^4}\,dx$$

$$=x^2\int \frac{|x|^3}{x^4}\,dx=\begin{cases} x^2\int \frac{1}{x}\,dx, & x>0 \\ -x^2\int \frac{1}{x}\,dx, & x<0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} x^2\ln|x|, & x>0 \\ -x^2\ln|x|, & x<0 \end{cases}$$

故其通解為 $y=c_1x^2+c_2x^2\ln|x|$

10. 解 $y''-\frac{y'}{x}+\frac{y}{x^2}=1$.

解：將原方程式化為 $y''-\dfrac{xy'-y}{x^2}=1$，即 $\left(y'-\dfrac{y}{x}\right)'=1$

積分之，得 $$y'-\frac{y}{x}=x+c_1$$

此為一階線性微分方程式，其通解為

$$\begin{aligned}
y&=e^{\int\frac{1}{x}\,dx}\left[\int e^{-\int\frac{1}{x}\,dx}(x+c_1)\,dx+c_2\right]\\
&=e^{\ln|x|}\left[\int e^{-\ln|x|}(x+c_1)\,dx+c_2\right]\\
&=|x|\left[\int |x|^{-1}(x+c_1)\,dx+c_2\right]\\
&=\begin{cases} x(x+c_1\ln|x|+c_2) &，若\ x>0\\ -x(-x-c_1\ln|x|+c_2) &，若\ x<0\end{cases}\\
&=x^2+c_1x\ln|x|+c_2x\ (因\ c_2\ 為任意常數)
\end{aligned}$$

習題 2-2

解下列各微分方程式.

3. $y''+\sqrt{3}y'+7y=0$

解：輔助方程式為 $r^2+\sqrt{3}r+7=0$，則

$$r=\frac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{(\sqrt{3})^2-4\cdot 7}}{2}=\frac{-\sqrt{3}\pm 5i}{2}$$

故其根分別為 $r_1=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{5}{2}i$ 與 $r_2=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{5}{2}i$.

所求微分方程式之通解為

$$y=e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x}\left(c_1\cos\frac{5}{2}x+c_2\sin\frac{5}{2}x\right)$$

6. $y''-4y'+5y=0$

解：輔助方程式爲 $r^2-4r+5=0$，則

$$r=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\times 5}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4}i}{2}=2\pm i$$

故其根分別爲 $r_1=2+i$ 與 $r_2=2-i$.

所求微分方程式之通解爲 $y=e^{2x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$.

8. $y'''-y''+y'-y=0$

解：輔助方程式爲 $r^3-r^2+r-1=0$，

因式分解得 $(r-1)(r^2+1)=0$，則 $r=1$ 或 $r=\pm i$

故其根分別爲 $r=1$，$r=-i$ 與 $r=i$.

所求微分方程式之通解爲 $y=c_1e^x+(c_2\cos x+c_3\sin x)$.

12. $y^{(4)}-7y''-18y=0$

解：輔助方程式爲 $r^4-7r^2-18=0$，因式分解得 $(r^2+2)(r^2-9)=0$.

故其根分別爲 $r=\pm 3$ 與 $r=\pm\sqrt{2}i$.

所求微分方程式之通解爲

$$y=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}+(c_3\cos\sqrt{2}x+c_4\sin\sqrt{2}x)$$

解下列各初值問題.

16. $\begin{cases} y'''-6y''+11y'-6y=0 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \\ y''(0)=2 \end{cases}$

解：輔助方程式爲 $r^3-6r^2+11r-6=0$，因式分解得

$$(r-2)(r^2-4r+3)=0，則 (r-2)(r-1)(r-3)=0$$

故其根分別爲 $r=1$，$r=2$，$r=3$.

所求微分方程式之通解爲

$$y=c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3e^{3x}$$

現在求 c_1、c_2 與 c_3

$$y'(x)=c_1e^x+2c_2e^{2x}+3c_3e^{3x}$$

$$y''(x)=c_1e^x+4c_2e^{2x}+9c_3e^{3x}$$

故得
$$\begin{cases} y(0)=c_1+c_2+c_3=0 \\ y'(0)=c_1+2c_2+3c_3=0 \\ y''(0)=c_1+4c_2+9c_3=2 \end{cases}$$

解得 $c_1=\dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}}=\dfrac{2}{2}=1$，$c_2=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}}=\dfrac{-4}{2}=-2$

$$c_3=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}}=\dfrac{2}{2}=1,$$

故所求初期值問題之特解為 $y=e^x-2e^{2x}+e^{3x}$.

習題 2-3

3. $y''-3y'+2y=e^{3x}+4x$

解：輔助方程式為 $r^2-3r+2=0$，則 $r=1$，$r=2$

故原微分方程式之補充函數為 $y_c=c_1e^x+c_2e^{2x}$.

設試驗解之形式為 $y_p=Ae^{3x}+Bx+C$

則
$$y'_p=3Ae^{3x}+B$$
$$y''_p=9Ae^{3x}$$

代回原方程式得

$$y''_p-3y'_p+2y_p=9Ae^{3x}-3(3Ae^{3x}+B)+2Ae^{3x}+2Bx+2C$$

$$
\begin{aligned}
&= -3B+2Ae^{3x}+2Bx+2C \\
&= 2Ae^{3x}+2Bx+(2C-3B) \\
&= e^{3x}+4x
\end{aligned}
$$

比較係數得 $A=\dfrac{1}{2}$，$B=2$，$C=3$. 故得特別積分爲 $y_p=\dfrac{1}{2}e^{3x}+2x+3$，

而原微分方程式之全解爲

$$y=y_c+y_p=c_1e^x+c_2e^{2x}+\frac{1}{2}e^{3x}+2x+3$$

5. $y''+4y=8\sin 2x$

解：輔助方程式爲 $r^2+4=0$，則 $r=\pm 2i$

故原微分方程式之補充函數爲 $y_c=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$.

設試驗解之形式爲 $y_p=Ax\sin 2x+Bx\cos 2x$

則 $$y'_p=A\sin 2x+2Ax\cos 2x+B\cos 2x-2Bx\sin 2x$$

$$y''_p=4A\cos 2x-4Ax\sin 2x-4B\sin 2x-4Bx\cos 2x$$

代回原方程式得

$$(4A\cos 2x-4Ax\sin 2x-4B\sin 2x-4Bx\cos 2x)$$
$$+4(Ax\sin 2x+Bx\cos 2x)=8\sin 2x$$

代簡得 $$4A\cos 2x-4B\sin 2x=8\sin 2x$$

比較係數得 $\begin{cases}4A=0\\-4B=8\end{cases}$，即 $A=0$，$B=-2$

故特別積分爲 $$y_p=-2x\cos 2x$$

而原微分方程式之全解爲

$$y=y_c+y_p=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x-2x\cos 2x$$

7. $y''-y'+2y=x^2e^{2x}$

解：輔助方程式爲 $r^2-r+2=0$，則 $r=\dfrac{1\pm\sqrt{1-8}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$

故原微分方程式之補充函數爲

$$y_c=e^{\frac{x}{2}}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)$$

設試驗解之形式爲　$y_p=(A+Bx+Cx^2)e^{2x}$

則

$$\begin{aligned}y'_p&=(B+2Cx)e^{2x}+2(A+Bx+Cx^2)e^{2x}\\&=e^{2x}[B+2A+(2B+2C)x+2Cx^2]\end{aligned}$$

$$y''_p=e^{2x}[2(C+2B+2A)+4(B+2C)x+4Cx^2]$$

代回原方程式得

$$\begin{aligned}y''_p-y'_p+2y_p&=e^{2x}[4A+4B+2C+(4B+8C)x+4Cx^2]\\&\quad+e^{2x}[-2A-B+(-2B-2C)x-2Cx^2]\\&\quad+e^{2x}[2A+2Bx+2Cx^2]\\&=e^{2x}[(4A+3B+2C)+(4B+6C)x+4Cx^2]\\&=e^{2x}x^2\end{aligned}$$

比較係數得 $\begin{cases}4A+3B+2C=0\\4B+6C=0\\4C=1\end{cases}$，故 $A=\frac{5}{32}$，$B=-\frac{3}{8}$，$C=\frac{1}{4}$

故特別積分爲　$y_p=\left(\frac{5}{32}-\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}x^2\right)e^{2x}$

而原微分方程式之全解爲

$$y=y_c+y_p=e^{\frac{x}{2}}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)+\left(\frac{5}{32}-\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}x^2\right)e^{2x}$$

9. $y''-4y'+4y=e^{2x}+e^x+1$

解：輔助方程式爲 $r^2-4r+4=0$，則 $(r-2)^2=0$，$r=2$ (二重根)

故原微分方程式之補充函數爲 $y_c=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$.

設試驗解之形式爲　$y_p=Ax^2e^{2x}+Be^x+C$

則　$y'_p=2Axe^{2x}+2Ax^2e^{2x}+Be^x$

$$y''_p=2Ae^{2x}+8Axe^{2x}+4Ax^2e^{2x}+Be^x$$

代回原方程式得

$$(2Ae^{2x}+8Axe^{2x}+4Ax^2e^{2x}+Be^x)-4(2Axe^{2x}+2Ax^2e^{2x}+Be^x)$$
$$+4(Ax^2e^{2x}+Be^x+C)=e^{2x}+e^x+1$$

化簡得 $$2Ae^{2x}+Be^x+4C=e^{2x}+e^x+1$$

比較係數得 $$A=\frac{1}{2},\ B=1,\ C=\frac{1}{4}$$

故特別積分爲 $$y_p=\frac{1}{2}x^2e^{2x}+e^x+\frac{1}{4}$$

而原微分方程式之全解爲

$$y=y_c+y_p=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+\frac{1}{2}x^2e^{2x}+e^x+\frac{1}{4}$$

利用參數變化法解下列各微分方程式.

11. $y''-2y'=e^x\sin x$

解：原微分方程式之補充函數爲

$$y_c=c_1+c_2e^{2x}$$

現假設原式之特解爲

$$y_p=v_1(x)+v_2(x)e^{2x}$$

而 $$W(y_1,\ y_2)=\begin{vmatrix}1 & e^{2x}\\ 0 & 2e^{2x}\end{vmatrix}=2e^{2x}\neq 0$$

故 $$v_1(x)=-\int\frac{e^{2x}\cdot e^x\sin x}{1\cdot 2e^{2x}}dx=-\frac{1}{2}\int e^x\sin x\,dx$$

$$=-\frac{1}{4}e^x(\sin x-\cos x)$$

而 $$v_2(x)=\int\frac{1\cdot e^x\sin x}{1\cdot 2e^{2x}}dx=\frac{1}{2}\int e^{-x}\sin x\,dx$$

$$=-\frac{1}{4}e^{-x}(\sin x+\cos x)$$

故原微分方程式之特別積分爲

$$y_p=-\frac{1}{4}\,e^x(\sin x-\cos x)-\frac{1}{4}\,e^x(\sin x+\cos x)=-\frac{1}{2}\,e^x\sin x$$

而全解爲　$y=y_c+y_p=c_1+c_2e^{2x}-\frac{1}{2}\,e^x\sin x$

12. $y'''+y'=\csc x$

解：原微分方程式之補充函數爲

$$y_c=c_1+c_2\cos x+c_3\sin x$$

現假設原式之特解爲

$$y_p=v_1(x)+v_2(x)\cos x+v_3(x)\sin x$$

而 $y_1(x)=1$，$y_2(x)=\cos x$，$y_3(x)=\sin x$，$F(x)=\csc x$

其關係式如下

$$\begin{cases} v_1'+v_2'\cos x+v_3'\sin x=0 \\ 0+v_2'(-\sin x)+v_3'\cos x=0 \\ 0+v_2'(-\cos x)+v_3'(-\sin x)=\csc x \end{cases}$$

$$W(y_1,\ y_2,\ y_3)=\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix}=1$$

解線性聯立方程式求 v_1'、v_2' 與 v_3'

$$v_1'=\frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ \csc x & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix}}{W(y_1,\ y_2,\ y_3)}=\csc x$$

$$v_2'=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \csc x & -\sin x \end{vmatrix}}{W(y_1,\ y_2,\ y_3)}=-\cot x$$

$$v_3'=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & \csc x \end{vmatrix}}{W(y_1,\ y_2,\ y_3)}=-1$$

分別積分，求 $v_1(x)$、$v_2(x)$ 與 $v_3(x)$

$$v_1(x)=\int \csc x\ dx=\ln|\csc x-\cot x|$$

$$v_2(x)=\int (-\cot x)\ dx=-\ln|\sin x|=\ln|\csc x|$$

$$v_3(x)=\int (-1)\ dx=-x$$

故原微分方程式之特解為

$$y_p=\ln|\csc x-\cot x|+\cos x\ln|\csc x|-x\sin x$$

而全解為

$$y=y_c+y_p=c_1+c_2\cos x+c_3\sin x+\ln|\csc x-\cot x|$$
$$+\cos x\ln|\csc x|-x\sin x$$

16. $y''+2y'+y=e^{-x}\ln x$

解：原微分方程式之補充函數為

$$y_c=(c_1+c_2x)e^{-x}$$

現假設原式之特解為

$$y_p=v_1(x)e^{-x}+v_2(x)xe^{-x}$$

而 $$W(y_1,\ y_2)=\begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & -xe^{-x}+e^{-x} \end{vmatrix}=e^{-2x}$$

$$v_1(x)=-\int \frac{xe^{-x}\cdot e^{-x}\ln x}{1\cdot e^{-2x}}\ dx=-\int x\ln x\ dx=\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{2}\ln x\ (\text{分部積分})$$

$$v_2(x)=\int \frac{e^{-x}\cdot e^{-x}\ln x}{1\cdot e^{-2x}}\ dx=\int \ln x\ dx=x\ln x-x\ (\text{分部積分})$$

故原微分方程式之特解爲

$$y_p=e^{-x}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{2}\ln x\right)+xe^{-x}(x\ln x-x)=x^2e^{-x}\left(\frac{1}{2}\ln x-\frac{3}{4}\right)$$

而全解爲

$$y=y_c+y_p=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+x^2e^{-x}\left(\frac{1}{2}\ln x-\frac{3}{4}\right)$$

18. $y'''+y'=\tan x$

解：原微分方程式之補充函數爲

$$y_c=c_1+c_2\cos x+c_3\sin x$$

現假設原式之特解爲

$$y_p=v_1(x)+v_2(x)\cos x+v_3(x)\sin x$$

而 $y_1(x)=1$，$y_2(x)=\cos x$，$y_3(x)=\sin x$，$F(x)=\tan x$
其關係式如下

$$\begin{cases} v_1'+v_2'\cos x+v_3'\sin x=0 \\ 0+v_2'(-\sin x)+v_3'\cos x=0 \\ 0+v_2'(-\cos x)+v_3'(-\sin x)=\tan x \end{cases}$$

$$W(y_1,\ y_2,\ y_3)=\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix}=1$$

解線性聯立方程式求 v_1'、v_2' 與 v_3'

$$v_1'=\frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ \tan x & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix}}{W(y_1,\ y_2,\ y_3)}=\tan x$$

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \tan x & -\sin x \end{vmatrix}}{W(y_1,\ y_2,\ y_3)} = -\tan x \cos x$$

$$v_3' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & \tan x \end{vmatrix}}{W(y_1,\ y_2,\ y_3)} = -\tan x \sin x$$

分別積分，求 $v_1(x)$、$v_2(x)$ 與 $v_3(x)$：

$$v_1(x) = \int \tan x\, dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| = \ln|\sec x|$$

$$v_2(x) = -\int \tan x \cos x\, dx = -\int \sin x\, dx = \cos x$$

$$v_3(x) = -\int \tan x \sin x\, dx = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}\, dx$$

$$= \int \cos x\, dx - \int \sec x\, dx = \sin x - \ln|\sec x + \tan x|$$

原式之特解爲

$$\begin{aligned} y &= \ln|\sec x| + \cos^2 x + \sin^2 x - \sin x \ln|\sec x + \tan x| \\ &= \ln|\sec x| - \sin x \ln|\sec x + \tan x| + 1 \end{aligned}$$

故原微分方程式之全解爲

$$\begin{aligned} y = y_c + y_p = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x + \ln|\sec x| \\ - \sin x \ln|\sec x + \tan x| \end{aligned}$$

習題 2-4

3. 有一 3 磅重的物體掛在彈簧下端，會使其拉長 1 英寸，現在換吊上 32 磅重的物體，並且浸入石油槽中，會使其產生阻力，其阻尼常數爲 12 磅. sec/呎. 現

將物體往上提高 6 英寸後釋放，求物體運動的變化且繪出其運動方程式之圖形.

解：$m=\dfrac{32}{g}=\dfrac{32}{32}=1$，$k=\dfrac{3}{1/12}=36$ 磅/呎，$c=12$，

代入 $m\dfrac{d^2y}{dt^2}+c\dfrac{dy}{dt}+ky=0$ 中，得

$$\frac{d^2y}{dt^2}+12\frac{dy}{dt}+36y=0$$

輔助方程式爲 $\lambda^2+12\lambda+36=0 \Rightarrow \lambda=-6，-6$

故微分方程式之通解爲 $y(t)=c_1e^{-6t}+c_2te^{-6t}$.

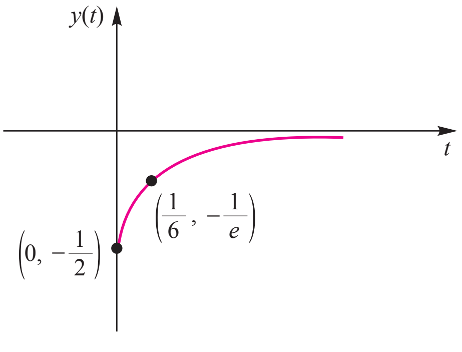
因 $$y(0)=-\frac{1}{2}\text{ 呎，}y'(0)=0$$

$$y'(t)=-6c_1e^{-6t}+c_2e^{-6t}-6c_2te^{-6t}$$

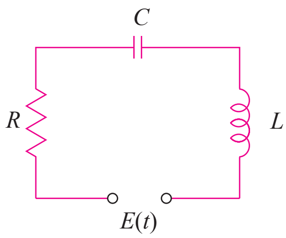
故 $\begin{cases} y(0)=-\dfrac{1}{2}=c_1 \\ y'(0)=0=-6c_1+c_2 \end{cases}$，解得 $c_1=-\dfrac{1}{2}$，$c_2=-3$

所以， $$y(t)=-\frac{1}{2}e^{-6t}(1+6t)\text{ 呎}$$

圖形如下所示.



8. 試求下圖所示 RLC 電路中的全態電流及穩態電流，其中 $R=20$ 歐姆，$L=5$ 亨利，$C=10^{-2}$ 法拉，$E(t)=85\sin 4t$ 伏特.



解：依克希荷夫定律得到 RLC 串聯電路的電流微分方程式為

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{I}{C}=E_0\,\omega\cos\omega t$$

依據題意得 $R=20$ 歐姆，$L=5$ 亨利，$C=10^{-2}$ 法拉，$E_0=85$ 伏特，$\omega=4$ (弳/秒)

故得
$$5\frac{d^2I}{dt^2}+20\frac{dI}{dt}+100I=340\cos 4t$$

上式所對應齊次微分方程式之輔助方程式為

$$5m^2+20m+100=0$$

即 $m^2+4m+20=0$，故 $m=-2\pm 4i$

所以
$$I_c(t)=e^{-2t}(c_1\cos 4t+c_2\sin 4t)$$

利用比較係數法，令
$$I_p(t)=A\cos 4t+B\sin 4t$$

則
$$I_p'(t)=-4A\sin 4t+4B\cos 4t$$

且
$$I_p''(t)=-16A\cos 4t-16B\sin 4t$$

代入原式，可得

$$\begin{aligned}&(-80A\cos 4t-80B\sin 4t)+(80B\cos 4t-80A\sin 4t)\\&\quad+(100A\cos 4t+100B\sin 4t)\\&=[(20A+80B)\cos 4t+(20B-80A)\sin 4t]\\&=340\cos 4t\end{aligned}$$

故 $\begin{cases} 20A+80B=340 \\ -80A+20B=0 \end{cases}$，得 $\begin{cases} A=1 \\ B=4 \end{cases}$

所以全態電流

$$I=I_c+I_p=e^{-2t}(c_1\cos 4t+c_2\sin 4t)+\cos 4t+4\sin 4t$$

而穩態電流

$$I=I_p=\cos 4t+4\sin 4t.$$